

# APLIKASI KRITERIA ROUTH-HURWITZ PADA KESTABILAN MODEL INTERAKSI PADI-HAMA

Sari Cahyaningtias

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas PGRI Adi Buana Surabaya

Email : scahyaningtias@gmail.com

## ABSTRAK

*Pertumbuhan tanaman padi pada lahan pertanian dapat membentuk suatu interaksi dengan pola tertentu dimana populasi tanaman padi yang bersifat dinamik sebagai prey (mangsa) mendapatkan ancaman dari predator (pemangsa). Predator dalam penelitian ini dibatasi pada hama. Kedua jenis spesies ini terikat dalam bentuk interaksi yang dinamakan predator-prey. Tingginya populasi pada salah satu jenis spesies akan mempengaruhi jumlah populasi spesies yang lain. Model Lotka-Volterra dua dimensi digunakan sebagai dasar pembentukan model dinamik interaksi antara tanaman padi dengan hama. Analisis kestabilan pada model ini, diperlukan untuk mendapatkan pola interaksi antara tanaman padi dengan hama. Pada penelitian ini didapatkan dua jenis titik penyelesaian dari sistem yang dibentuk antara lain  $E_1 (0,0)$  dan  $E_2 (x^*, y^*)$ . Hasil dari analisis titik-titik penyelesaian yang didapatkan menunjukkan bahwa pada titik  $E_1$  terjadi kepunahan baik pada predator (hama) dan juga prey (padi). Sedangkan pada  $E_2$  terjadi kesetimbangan pada proses interaksi. Analisis kestabilan nilai karakteristik dan kestabilan Routh-Hurwitz menunjukkan bahwa sistem ini stabil pada  $E_2$*

**Keywords:** *Routh-Hurwitz criteria, Stability analysis, Lotka-Volterra modelling,*

## 1. PENDAHULUAN

Indonesia merupakan salah satu negara berkembang yang bergantung pada padi sebagai sumber pangan pokok. Kebutuhan ini tiap hari semakin meningkat sekalipun pemerintah telah mencanangkan sumber pokok lain selain padi, seperti singkong, sagu, jagung, dan kentang. Penurunan hasil produksi padi dilain pihak turut serta dalam mempengaruhi kestabilan persediaan pangan. Seiring berjalannya waktu, tingkat produksi padi di Indonesia turun secara signifikan sehingga mendorong pemerintah untuk melakukan impor beras sebagai langkah pencegahan krisis pangan di Indonesia. Kebijakan tersebut bukan tanpa akibat, karena secara tidak langsung eksistensi petani terancam oleh kebijakan impor tersebut. Fenomena tersebut mendorong adanya penelitian yang dapat memastikan kestabilan dalam sistem tanam padi di tanah air, sehingga dapat menekan angka impor beras dan menurunkan harga beras secara tidak langsung.

Ekosistem adalah keadaan khusus tempat komunitas suatu organisme hidup dan

komponen organisme tidak hidup dari suatu lingkungan yang saling berinteraksi (KBBI, 2015). Tingkat produksi padi tiap tahun menurun karena adanya penurunan tingkat kesuburan tanah, curah hujan, faktor alam seperti predator yang mengancam pertumbuhan padi. Penggunaan pestisida untuk membasmi hama juga tidak dapat digunakan secara rutin karena akan berpengaruh pada kestabilan ekosistem itu sendiri. Sebaliknya, metode rantai makanan alami juga tidak dapat sepenuhnya digunakan karena tingkat pertumbuhan predator sangat tinggi.

Sistem tanam padi di bagi menjadi 3 masa, yaitu: masa persemaian padi, masa pertumbuhan padi, dan masa panen padi. Ketiga masa tersebut memiliki karakteristik predator yang berbeda-beda. Hama disebut sebagai pemangsa yang memiliki ancaman paling besar pada ketiga masa pertumbuhan padi ini. Perilaku ini mendorong dibutuhkannya suatu tindakan pengendalian hama tanpa merusak stabilitas ekosistem dalam persawahan tersebut. Beberapa metode

penanaman padi telah dikembangkan di Indonesia salah satunya adalah metode SRI (System of Rice Intensification) beberapa metode pencegahan penyebaran penyakit pada padi telah dikembangkan, antara lain: pemilihan bibit unggul dan penggunaan pestisida baik organik maupun anorganik (Anonim, 2014).

Model Lotka-Volterra telah banyak dijadikan rujukan untuk membentuk model sistem dinamik dari populasi spesies-spesies dalam suatu ekosistem yang memiliki keterikatan sebagai pemangsa-mangsa. Model ini dikembangkan menjadi dua macam model berdasarkan jumlah spesies yang berpengaruh dalam ekosistem, yaitu: dua dimensi dengan satu spesies sebagai predator dan satu spesies sebagai mangsa; dan tiga dimensi dengan satu spesies sebagai mangsa dan dua jenis spesies sebagai pemangsa/predator.

Penelitian ini dilakukan dengan membentuk model dinamik populasi padi dalam pertanian dengan mempertimbangkan hama wereng sebagai predator pemangsa. Berdasarkan model sederhana *Lotka-Volterra*, mangsa-pemangsa dua dimensi, akan didapatkan model matematika yang sesuai untuk situasi pertanian khususnya padi di Indonesia. Penelitian dilakukan dengan mengambil data lapangan dari dinas pertanian dan lembaga penelitian Indonesia untuk mendapatkan data yang akurat sebagai parameter-parameter yang mempengaruhi sistem pertumbuhan padi.

Definisi suatu kestabilan berada pada titik-titik penyelesaiannya, secara umum didefinisikan suatu persamaan differensial tingkat satu  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  dengan  $x \in \mathbb{R}^n$ , penyelesaian dengan keadaan awal  $x(0) = x_0$  dinotasikan oleh  $x(t, x_0)$ .

- Vektor  $\bar{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x} = 0)$  disebut titik setimbang
- Suatu titik setimbang  $\bar{x}$  dikatakan stabil jika untuk setiap  $\epsilon > 0$  ada  $\delta > 0$  dan  $t_\delta$  sedemikian sehingga jika  $\|x_{t_\delta} - \bar{x}\| < \delta$

maka  $\|x(t, x_{t_\delta}) - \bar{x}\| < \epsilon$  untuk semua  $t > t_\delta$

- Suatu titik setimbang  $\bar{x}$  dikatakan stabil asimtotik jika stabil dan jika dan hanya jika ada  $\delta_1 > 0$  sedemikian sehingga  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_{t_\delta}) - \bar{x}\| = 0$  jika  $\|x_{t_\delta} - \bar{x}\| < \delta_1$

Titik setimbang pada suatu sistem tak linier didefinisikan menjadi tiga, yaitu: Sebuah titik simpul jika akar karakteristiknya riil dan bertanda sama. Jika salah satu bertanda positif maka disebut titik simpul tidak stabil sebaliknya disebut titik simpul stabil jika keduanya bertanda negatif; sebuah titik pelana (*saddle point*) jika akar karakteristiknya riil, berlawanan tanda. Titik ini tidak stabil; sebuah titik fokus jika akar karakteristiknya bilangan kompleks, jika bagian riilnya positif maka disebut titik fokus tidak stabil sebaliknya jika bagian riilnya negatif disebut titik fokus stabil.

Analisis kestabilan pada penelitian ini didapatkan dengan menerapkan kriteria *Routh-Hurwitz*, yang merupakan metode efektif untuk menguji kestabilan sistem persamaan linear. Uji kestabilan ini didasarkan pada pengurutan koefisien persamaan karakteristik suatu fungsi transfer dengan persamaan karakteristik.

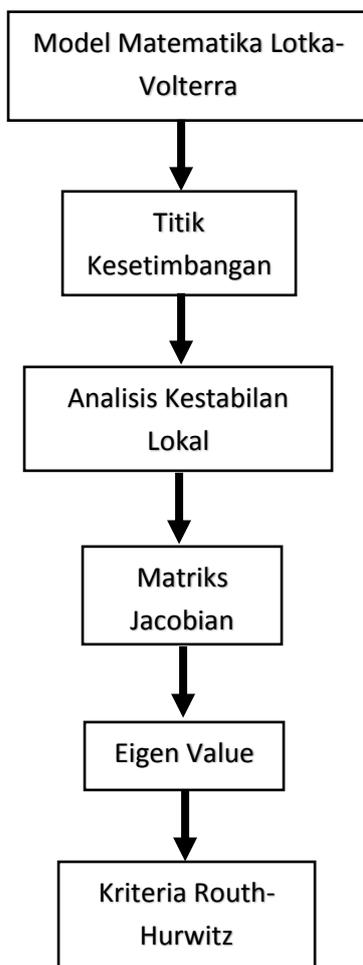
## 2. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah sistematis yang dilakukan untuk mendapatkan tujuan akhir dari penelitian, yaitu:

Model matematika Lotka-Volterra dirujuk sebagai interpretasi dinamik modelling dari hubungan padi-hama karena memiliki kesamaan secara karakteristik hubungan predator-prey. Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan kriteria Routh-Hurwitz untuk menganalisis kestabilan sistem. Gambar 1 terlihat bahwa tahapan yang dilakukan setelah pembentukan model matematika adalah mendapatkan titik kesetimbangan (equilibrium point(s)) dari sistem persamaan.

Selanjutnya, analisis kestabilan dipusat pada titik penyelesaian yang telah didapatkan. Titik-titik ini dibentuk matriks jacobian

(tahap hampiran linear) sistem untuk mendapatkan nilai eigen (karakteristik) sistem.



**Gambar 1.** Diagram Alir Metode Penelitian Analisis Kestabilan Menurut Kriteria Routh-Hurwitz

Fungsi transfer yang dibentuk dari nilai eigen digunakan sebagai obyek dari kriteria Routh-Hurwitz.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Model Matematika Sistem Predator-Prey

Model matematika pemangsa-mangsa pada sistem pertanian padi yang direpresentasikan dengan model *Lotka-Volterra* memiliki beberapa asumsi sebagai berikut:

- Populasi dibagi menjadi dua kelompok, yaitu:

$x(t)$  menunjukkan populasi prey (padi) pada saat  $t$

$y(t)$  menunjukkan populasi predator (hama) pada saat  $t$

- Diasumsikan  $a$  adalah tingkat pertumbuhan alami *prey* tanpa adanya pemangsa,  $\beta$  adalah pengaruh predator terhadap *prey*,  $c$  tingkat kematian predator secara alami, dan  $\gamma$  menunjukkan tingkat efisiensi dan perkembangbiakan predator terhadap kehadiran *prey*.
- Pada suatu ekosistem yang ideal tidak mungkin salah satu dari populasi punah.

Dari asumsi model matematika ini, dapat dibentuk suatu sistem antara predator dan prey sebagai berikut:

- Populasi mangsa

$$\frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \quad (3.1)$$

Yakni, besarnya laju populasi prey yang dipengaruhi oleh tingkat pertumbuhan alami prey dan ancaman predator pada suatu area tertentu.

Pada penelitian ini,  $dx/dt$  menunjukkan tingkat populasi padi yang dipengaruhi oleh pertumbuhan alami padi tanpa gangguan pemangsa dan tingkat kematian padi akibat hama.

- Populasi pemangsa

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \quad (3.2)$$

Yakni, besarnya laju populasi predator yang dipengaruhi oleh tingkat kematian alami predator dan tingkat efisiensi serta perkembangan predator terhadap kehadiran prey disuatu area tertentu.

Penelitian ini, persamaan (3.2) menunjukkan tingkat populasi hama pemakan padi, dimana laju pertumbuhannya dipengaruhi oleh tingkat kematian hama secara alami (bukan pestisida) dan serta pengaruh keberadaan padi pada pertumbuhan hama.

#### 3.2 Titik Setimbang Model

Kriteria kestabilan dari sistem persamaan diferensial tergantung pada perilaku sistem.

Titik kesetimbangan suatu sistem matematika didapatkan dengan menyelesaikan model tersebut atau biasa disebut dengan titik penyelesaian suatu sistem. Titik kesetimbangan dari sistem ini, didapatkan dari sistem persamaan (3.1) dan (3.2) ini, diperoleh dari  $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$  sehingga persamaan (3.1) dan (3.2) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \beta xy$$

$$\Leftrightarrow 0 = x(a - \beta y)$$

Dan

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

$$\Leftrightarrow 0 = y(-c + \gamma x)$$

secara umum dapat ditunjukkan bahwa sistem persamaan tersebut memiliki dua kemungkinan penyelesaian, yaitu  $E_1(0,0)$  sebagai titik pusat dan  $E_2(x^*, y^*)$ .

dengan  $E_1(0,0)$  adalah kondisi dimana terjadi kepunahan baik prey ataupun predator, sedangkan  $E_2(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\beta})$  adalah kondisi dimana terjadi kesetimbangan proses mangsa dan dimangsa. Titik kesetimbangan  $E_1$  tidak mungkin terjadi, sehingga baik pada analisis kestabilan lokal dan globalnya dilakukan dengan mempertimbangkan  $E_2$  sebagai titik penyelesaian sistem.

### 3.3 Kestabilan Lokal

Setelah mendapatkan titik-titik kesetimbangan, selanjutnya akan dilakukan hampiran linear pada sistem dinamik predator-prey. Hampiran linear (pelinearan) dilakukan agar memudahkan untuk menganalisis karakteristik dari suatu sistem dinamik. Pada penelitian ini, hampiran linear dilakukan agar dapat menganalisis kestabilan sistem dinamik predator-prey tersebut.

Linearisasi dilakukan dengan menerapkan ekspansi deret Taylor disekitar titik kesetimbangan  $E_2$ , sehingga didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

Dengan

$$f(x, y) = ax - \beta xy$$

$$g(x, y) = -cy + \gamma xy$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\beta}\right)$$

Sehingga,

$$J = \begin{bmatrix} a - \beta y & -\beta x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

$$= \begin{bmatrix} a - b \cdot \frac{a}{b} & -b \cdot \frac{c}{\gamma} \\ d \cdot \frac{a}{\beta} & -c + \gamma \frac{c}{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta c}{\gamma} \\ \frac{a\gamma}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian dapat digunakan untuk menentukan nilai karakteristik dari sistem dinamik tersebut. Analisis kestabilan lokal didekati dengan dua cara, yaitu kestabilan berdasarkan nilai karakteristik (*eigen value*) dan kestabilan berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*. Pada penelitian ini dianalisis kestabilan sistem berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*.

### 3.4 Analisis kestabilan kriteria *Routh-Hurwitz*

Kriteria *Routh-Hurwitz* menyajikan kestabilan berdasarkan dari tanda dari konstanta polinomialnya. Hal ini memungkinkan untuk tidak perlu mencari nilai-nilai karakteristik dari sistem. Dengan menerapkan metode yang sama, diperoleh bentuk polinomial dari fungsi eigennya sebagai berikut:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + ac$$

**Tabel 1.** Metode Routh – Hurwitz untuk Koefisien  $\lambda^2, \lambda$  pada Persamaan Karakteristik

Didapatkan tabel konstanta, sebagai berikut:

$\lambda^2$	1	0	$ac$
$\lambda^1$	0	0	0
$\lambda^0$	$ac$	0	0

Kestabilan *Routh-Hurwitz* ditentukan dari kolom pertama tabel diatas. Kriteria ini, dapat

dianalisis melalui perubahan tanda pada kolom pertama tersebut. Telah didefinisikan sebelumnya bahwa parameter  $a, c \geq 0$ , namun karena seluruh elemen pada baris  $\lambda$  sama dengan nol maka dibentuk polinomial pembantu yang koefisiennya berada pada baris  $\lambda^2$  yaitu  $q(\lambda) = \lambda^2 + ac$  didapatkan  $\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} = 2\lambda + 0$ . Selanjutnya elemen-elemen pengganti disubstitusikan pada Tabel 5.1.

**Tabel 2.** Metode *Routh-Hurwitz* pengganti untuk Koefisien  $\lambda^2, \lambda$  pada Persamaan Karakteristik

$\lambda^2$	1	0	$ac$
$\lambda^1$	2	0	0
$\lambda^0$	$ac$	0	0

Tabel 2 menunjukkan bahwa tidak terjadi perubahan tanda pada kolom pertama (semuanya positif), maka menurut aturan *Routh-Hurwitz* seluruh akar-akar karakteristik polinomial tersebut bernilai tak positif pada bagian realnya, sehingga sistem tersebut **stabil**.

#### 4. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan analisis yang dilakukan terhadap model Lotka-volterra dua dimensi dapat diketahui bahwa terdapat tiga jenis titik equilibrium (titik kesetimbangan) yaitu  $E_0(0,0)$  adalah kondisi dimana kedua populasi subyek dalam ekosistem punah;  $E_1(x^*, 0)$  adalah kondisi dimana tidak ada predator yang memangsa; dan  $E_2(x^*, y^*)$  kondisi ketika terjadi interaksi antar spesies.

Analisis stabilitas difokuskan pada  $E_2$ , dari hasil analisis kestabilan lotka dengan menerapkan beberapa metode, yakni analisis nilai karakteristik dan kriteria *Routh-Hurwitz* didapatkan bahwa sistem dinamik ini stabil pada titik tersebut.

Keakuratan analisis stabilitas secara matematika diperlukan pengujian lebih lanjut yaitu simulasi dimana dilakukan uji coba untuk beberapa keadaan yang berbeda seperti tingkat kematian alami predator. Faktor-faktor lain yang berpengaruh langsung pada pertumbuhan prey (padi) pada penelitian berikutnya layak untuk dipertimbangkan, sehingga diperoleh

analisis yang mendekati fenomena nyata ekosistem pertanian khususnya padi.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- Anonim, (2014), “Tehnik dan Budidaya Penanaman Padi *System of Rice Intensification* (SRI)”, Pusat Pelatihan Kewirausahaan Sampoerna, Pasuruan.
- Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. (2005), *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 8th Edition*, John Wiley and Sons.
- Georgescu, P., Hsieh, H.Y. dan Zhang, H. (2010), *A Lyapunov Functional For A Stage-Structured Predator-Prey Model With Nonlinear Predation Rate*, J. Math. Nonlinear Analysis: Real World Applications 11: 3653-3665.
- Raj, M. R. S. Dkk, (2013), *Stability in a Discrete Prey-Predator Model*, International Journal of Latest Research in Science and Technology 2(1): pp 482-485.
- stanford.edu/class/ee363/lectures/lyap.pdf (2008), Basic Lyapunov Theory diunduh pada 22 Juni 2015
- Subiono (2013), *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*, Diktat Kuliah Jurusan Matematika ITS, Surabaya.
- Takeuchi, Y. Dkk (2006), *Evolution of Predator-Prey Systems Described by a Lotka-Volterra Equation Under Random Environment*, J. Mathematical Analysis and Application 323 pp 938-957.
- <http://www.slideshare.net/IndriGustiantiII/sumber-daya-pertanian-dan-perkebunan> diunduh tanggal 05 Agustus 2015 pukul 05.36 WIB
- <http://tani-kaliyoso.blogspot.com/2012/02/awas-serangan-hama-wereng-coklat.html> diunduh tanggal 05 Agustus 2015 pukul 05.38 WIB
- <https://sakanutrend.wordpress.com/2013/09/12/solusi-pertanian-di-negeri-nan-subur/> diunduh tanggal 05 Agustus 2015 pukul 05.38 WIB